

総合の学習

国語・技術・音楽・数学・理科

松田



P.1

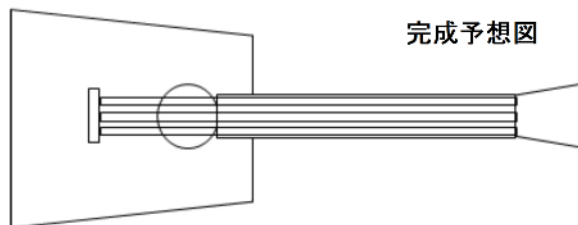
今回の総合の主人公は、バイオレ君です。

彼は探究心旺盛な中学生です。今回彼が取り組んだのは、前から興味を抱いていた楽器の作成でした。その楽器の名は「ギター」……。ちょっと頑張りすぎの感はいなめませんが、お手並み拝見といきましょう。

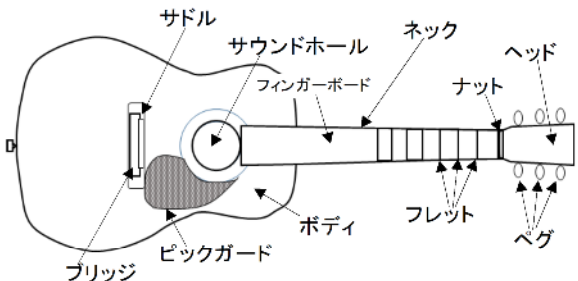


【設計の段】《技術》

実際のギターを見ると板がくねりと曲がって、板を曲げ変形させるのは、さすがのバイオレ君でもあまりに時間がかかりそうなのであきらめ、「ボディの部分は箱型でもいいか」と腹をくくりました。そして、完成予想図が次のようになりました。



思いのほか現代風のイカした格好ではありませんか。気を良くしたバイオレ君、せっせと作業を進めていきます。バイオレ君が製作にいそしむ間をかりて、ギターの各部位（各部分）について、説明しておきましょう。

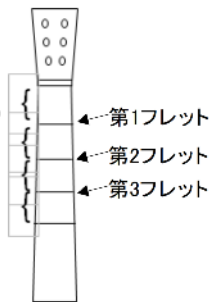


【謎出現の段】《数学・音楽》

弦の引っ張る力でもろそうなボディとネックの接合部分は、後で力技で乗り切るとして、ふと思ったのは、ネックの表側（フィンガーボード）に設置するフレットをどんな間隔で取り付

けようかということでした。

本物のギターを取り出し、よく見てみると、フレットの間隔がブリッジ側へ向かってだんだんと狭まっていくではありませんか。この間隔をどうとるか、弦を張って耳



で確かめながらという手もあるでしょうが、そこはさすがのバイオレ君。この少しずつ狭まっ

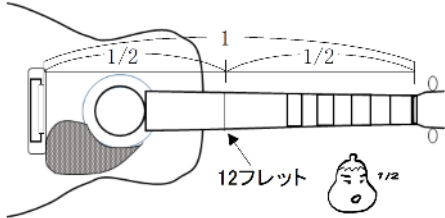


ていくということに何らかの法則があるはずだとひらめいたのです。それからものはものさしを持ち出し実際のギターを測りました。でも、

答えは見えてきません。何分たったのでしょうか、やっと一つのことが見えてきました。それは、12フレットのところが、ブリッジにあるサドルからナットまでの長さ（つまり、弦の長さ）の半分（ $1/2$ ）のところにあるということでした。さらにバイオレ君はこの12フレットというのは押さえて弦を弾いたときに、押さえないで弾いたときの1オクターブ上の音が出るポジションであることにもすぐに気がついたのです。

ここまでわかったことをまとめておきましょう。

- ① 弾かれる弦の長さの $1/2$ の位置
= 第12フレット
- ② 1オクターブ上の音の出る場所
= 第12フレット





弦は長さが半分になると1オクターブ高い音を出すんだ。ということは、半分の半分、 $1/4$ の長さがさらにオクターブ上の音になることもつきとめました。そして $1/8$ 、 $1/16$ ……でも、そんな発見はあったものの、少しずつ減ってゆくフレットの構造にはたどり着けません。同じ数だけ順に減らしていけばいいのかと考えたのですが……。



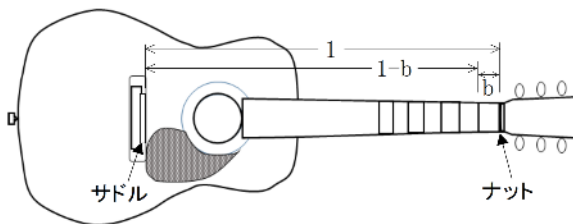
(等差数列)

10から1ずつ減らしていったとしたら10の次が9、その次が8、7、6……。10回目には0になってしまいます。0.5ずつ減らしていても、20回目には0。何か違うようです。

次に思いついたのが同じ割合で減っていったのではないかでした。(等比数列)

弦の長さから見て、弦の長さを仮に1としたとき、第1フレット～サドルまでの長さは、弦の長さ「1」-ナット～第1フレット(ここでは「b」としておきましょう)の長さとなります。

◎サドル～第1フレット = $1-b$



◎サドル～第2フレット = $(1-b) \cdot (1-b) \times \frac{b}{1}$

$$\begin{array}{l} 1 : (1-b) = (1-b) : x \\ \Downarrow \\ \frac{(1-b)}{1} = \frac{x}{(1-b)} \\ \Downarrow \\ (1-b)^2 = x \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= (1-b) \cdot (1-b)b \\ &= (1-b)^2 \end{aligned}$$

◎サドル～第3フレット = $(1-b)^3$

ということは、 $(1-b)$ の部分をおきかえると

$$y = a^x$$

という式が成り立つのです。

バイオリン君、見たこともない数式に???

助け舟を出しましょう。このような数式(関数)は、中学校ではまだ詳しく勉強しませんし、中学2年であるバイオリン君が悩むのもしかたないことなのでしょう。正確にはこのような等比数列の関数を指数関数といいます。

x には何フレット目かの数値をいれ、
y は弦の長さを表わします。

つまり

- ① $1 = a^0$ ……弦をどこも押さえない (x=0)開放弦
- ② $1/2 = a^{12}$ ……12フレットを押さえる (x=12)

この二つの式が成り立つ(本当は②だけで十分だが) a の値を求めればいわけです。

しかし、a を12乗して $1/2$ (0.5) になる数を探すのは大変、コンピュータの力をかりて求めました。すると、表われてきたa は

$$0.9438743127 \dots$$

$$a \doteq 0.9438743127$$

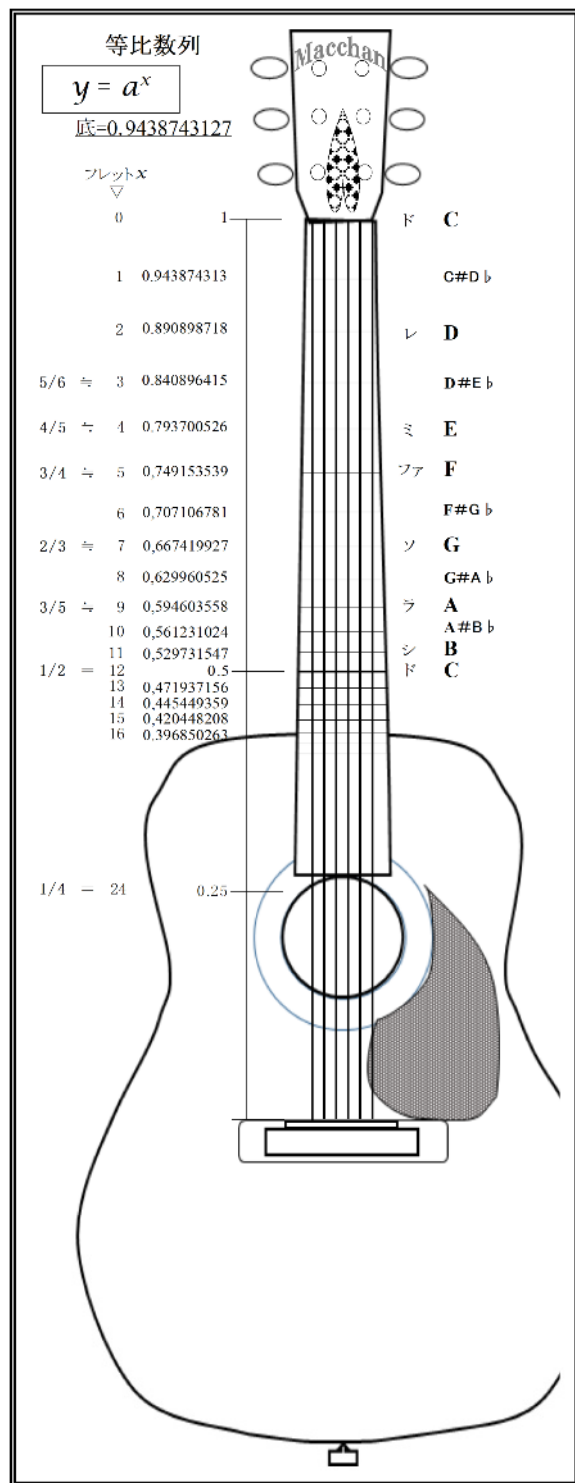
ただただ目を回すばかりのバイオリン君でした。なにはともあれa がわかったので、フレットの位置は求められそうです。





【割り出しの段】《数学》

a が 0.9438743127 から 1 フレット目が
 $y = (0.9438743127)^1$
 $= 0.9438743127$

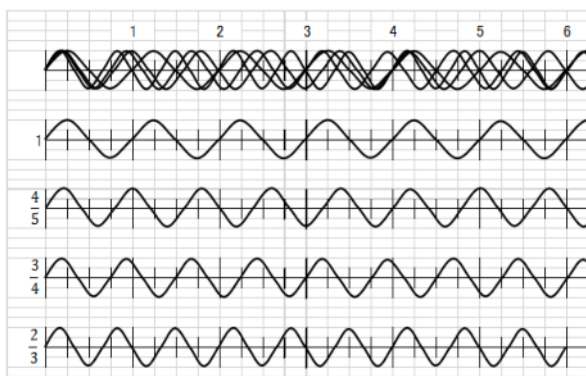


2 フレット目…… $y = (0.9438743127)^2$
 $= 0.890898718$

左の図のようにフレットを設置する位置が求められました。

【新たな発見の段】《数学・音楽・理科》

バイオリン君はやっぱりえらい！先ほど「弦の長さが半分になると1オクターブ高い音を出す」ことを発見しましたが、さらに図にまとめながら気づいたので。五度上の音は（ドに対して上のソの音）は、弦の長さが 0.667419927、すなわち限りなく2/3に近いのだと。また四度上の音（上のファの音）は3/4の長さに近く、長三度にあたるミの音は4/5に近い、言いかえると弦の長さが整数比（2：3や3：4）の時、同時にその音を鳴らしたとき、よく音が調和する（ハモる）のであります。これは、波長といって、振動数と正比例の関係にあります。1：2ではドの音が1回振れる間にオクターブ上のドは2回振れることになります。つまり片方の音が2回振れる間に必ず1回、交わる（調和する）のです。この比におけるお互いの最小公倍





数が少ない数であるほど、音は調和するのです。弦の長さが、1と $3/4$ の時なら(4:3)、ドの音が3回振れ、ファの音が4回振れて交わる関係となります。

理科で音さを用いての実験をしましたね。同じ波長(振動数、周波数)のもの同士は片方が鳴ると、別の一方も響き始める、共鳴というのを覚えていますか。共鳴はもちろん同じ周波数(同じ高さの音)同士が一番響きあうわけですが、次は倍音(オクターブ)の関係(2:1)にある音が響きあいやすく、さらに次はドとソの関係(3:2)にある音が響きやすいわけです。

まあ、難しいことはさておき、新たな疑問として、バイオレ君は、「いつそのことソにあたる音(完全五度)を $2/3$ びつたりにすればいいのに、なぜ0.667419927という地点にあるのか」と思いました。

昔はそのような音階での音楽も存在したらしいのですが、現代では十二平均律といって、厳密な比率のもとに音階をとっているのです。ピアノの調律などももちろんそうです。なぜなら、ファを $3/4$ 、ソを $2/3$ にびつたりと合わせてしまったら、その調では快く聞こえたとしても、別の調ではへんてこな事になってしまうからです。

オーケストラや合唱などを経験して音楽に詳しい人なら

こんな話を聞いたことがあるのではないのでしょうか。ド・ミ・ソの和音を奏する時、若干真ん中のミの音を低くとったほうがいいと。これは、ドの音

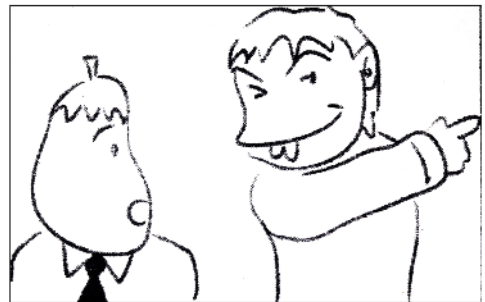


に対してソの音が(0.667419927)と、 $2/3$ に限りなく近いのに対し、ミの音は $4/5$ には近いものの、(0.793700526)であって、少しの開きがあるため、 $4/5$ に近づけるうえで、さげたほう(低くとる)が、調和しよく響くハーモニーを作り出すからです。ギターやピアノといった楽器は演奏中に音程を高低させることはできませんが、管楽器やフレットの無い弦楽器(バイオリンなど)や人の声は、そのつど音程を変化させることが可能なので、より深みのある和音を構成することができるのです。

何かすっきりしたバイオレ君、本題に戻してギターの製作を再開しました。

【思わぬ展開?よくある結末】《国語》

ふってわいた災難……? 友達のマアちゃんが、「ビリヤードしにいこーぜ!」とバイオレ君を誘いに来たのでした。ビリヤード好きのバイオレ君、断ることなどあるはずありません。ととと、マアちゃんと夕暮れ迫る町へと飛び出して行きました。



しばらくして、バイオレ君のママが夕飯だよと、バイオレ君の部屋へ呼びに来た時、もぬけのからとなった部屋に散乱する木くず・がらくた……。

あとは、ご想像のとおりです。バイオレママの怒りの波長は、どうやらバイオレ君には共鳴しなかったようです。暗い夜道を意気揚々と帰宅への道をたどる彼に、後に一撃の震動が加えられたのは言うまでもありません。

END

